Esercizi su integrali curvilinei di campi scalari

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Dati

$$\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{campo } \underline{\text{scalare continuo}}$$

$$\Gamma \quad \text{curva } \underline{\text{regolare a tratti}}\text{, con rappr. param.}$$
$$\overrightarrow{r}(t),\ t \in [a,b],\ \ \overrightarrow{r}([a,b]) \subset A$$

definiamo <u>integrale curvilineo di φ di prima specie</u>

$$\int_\Gamma \varphi ds := \int_a^b \varphi(\overrightarrow{r}(t)) \|\overrightarrow{r}'(t)\| \, dt$$

Es. 1.

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2 - z)\, ds$$

ove Γ è l'arco di elica circolare

$$\vec{r}(t) = R\cos(t)\,\vec{i}_1 + R\sin(t)\,\vec{i}_2 + ht\,\vec{i}_3 \qquad t \in [0, \pi]$$

Calcoliamo

$$\vec{r}\,'(t) = -R\sin(t)\,\vec{i}_1 + R\cos(t)\,\vec{i}_2 + h\,\vec{i}_3 \qquad t \in [0, \pi]$$

Quindi

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t) + h^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + h^2}$$

Allora

$$\int_\Gamma (x^2 + y^2 - z)\, ds =$$

$$= \int_0^\pi \left((R\cos(t))^2 + (R\sin(t))^2 - ht \right) \sqrt{R^2+h^2}\, dt$$

$$= \sqrt{R^2+h^2} \int_0^\pi (R^2 - ht)\, dt$$

$$= \ldots\ldots$$

$$\boxed{= \sqrt{R^2+h^2}\left(R^2\pi - \frac{h}{2}\pi^2\right)}$$

Es. 2.

$$\int_\Gamma xye^{x^2}\, ds$$

ove Γ è la curva

$$\vec{r}(t) = 3\cos(t)\,\vec{i}_1 + 3\sin(t)\,\vec{i}_2 \quad t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$$

Calcoliamo

$$\vec{r}'(t) = -3\sin(t)\,\vec{i}_1 + 3\cos(t)\,\vec{i}_2$$

Quindi

$$\|\vec{r}'(t)\| = 3$$

Allora

$$\int_\Gamma xye^{x^2}\,ds$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (3\cos(t))\cdot(3\sin(t))e^{9\cos^2(t)}\,3\,dt$$

$$= 27\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \underbrace{\cos(t)\sin(t)}_{= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\cos^2(t))} e^{9\cos^2(t)}\,dt$$

$$= -\frac{3}{2}\left[e^{9\cos^2(t)}\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^9$$

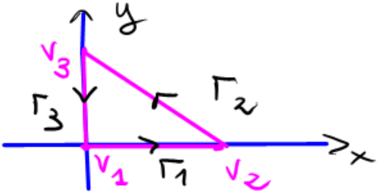
Es. 4.

$$I = \int_\Gamma (x + y)\, ds$$

ove Γ è la frontiera del triangolo di vertici

$$V_1 = (0,0), \quad V_2 = (1,0), \quad V_3 = (0,1)$$

percorsa in senso antiorario.



Si ha che $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ e, per l'additività dell'integrale

$$\int_\Gamma (x+y)\, ds = \int_{\Gamma_1} (x+y)\, ds + \int_{\Gamma_2} (x+y)\, ds + \int_{\Gamma_3} (x+y)\, ds$$

- Una parametrizzazione di Γ_1 è Γ_1 giace sull'asse x

$$\vec{r}_1(t) = t\vec{i}_1 + 0\vec{i}_2, \quad t \in [0,1]$$

quindi

$$\begin{cases} \vec{r}_1{}'(t) = \vec{i}_1 \\ \|\vec{r}_1{}'(t)\| = 1 \end{cases}$$

quindi

$$\int_{\Gamma_1} (x+y)\, ds = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

- Una parametrizzazione di Γ_2 è

Γ_2 congiunge $(1,0)$ a $(0,1)$, quindi giace sulla retta $y = 1-x$

$$\Rightarrow \vec{r}_2(t) = t\,\vec{i}_1 + (1-t)\,\vec{i}_2, \quad t \in [0,1]$$

quindi

$$\begin{cases} \vec{r}_2{}'(t) = \vec{i}_1 - \vec{i}_2 \\ \|\vec{r}_2{}'(t)\| = \sqrt{2} \end{cases}$$

quindi

$$\int_{\Gamma_2} (x+y)\, ds = \int_0^1 (t + (1-t))\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}$$

- Una parametrizzazione di Γ_3 è

Γ_3 congiunge $(0,1)$ a $(0,0)$.
Una sua param. è
$\vec{r}_3(t) = 0\,\vec{i}_1 + (1-t)\,\vec{i}_2$, $t \in [0,1]$

quindi

$$\begin{cases} \vec{r}_3{}'(t) = -\vec{i}_2 \\ \|\vec{r}_3{}'(t)\| = 1 \end{cases}$$

quindi

$$\int_{\Gamma_2} (x+y)\, ds = \int_0^1 (1-t)\, dt$$
$$= \frac{1}{2}$$

Allora

$$\int_{\Gamma} (x+y)\, ds = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$$